

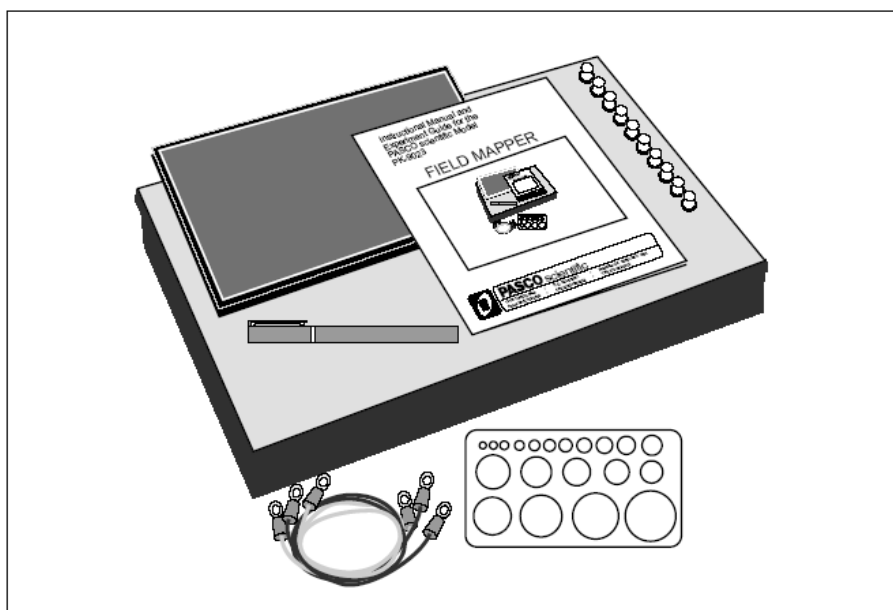
FYSIK 2 - ØVELSER

ELEKTROMAGNETISME

Elektriske felter og potentialer

Placering: Bygning 307, Rum 015, 009 og 028

Supplerende læsning: University Physics, 12th (11th) ed.,
kap. 21, 22 (især 22.3), 23 (især 23.4 og 23.5) og 25



VIGTIGT: GÅ HURTIGT I GANG MED AT TEGNE ELEKTRODER !

Baggrund

Øvelsen har til formål at give deltagerne en vis fortrolighed med elektrostatiske felter og potentialer og deres indbyrdes sammenhæng. I arbejder med de felter, som fremkommer mellem metalliske objekter med veldefinerede potentialer (spændinger). Den type problemer kan være vanskelige at løse fordi ladningsfordelingen på overfladen af metallerne ikke uden videre er kendt. Man kan altså ikke bestemme felt/potential direkte ud fra Coulombfeltet og superposition. Den praktiske øvelse og de tilhørende beregninger begrænser sig til 2-dimensionale systemer, men mange resultater kan uden videre - i hvert fald kvalitativt - generaliseres til 3 dimensioner og dermed mange praktiske situationer.

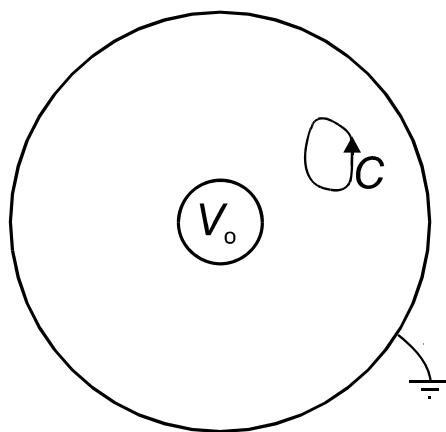
3-delning af øvelsen

- Teori. Ækvipotentialkurver for cylindrisk elektrodekonfiguration
- Simulering. Numerisk løsning af udvalgte elektrodekonfigurationer (**side 4**)
- Eksperiment. Måling på selvvalgte elektrodekonfigurationer (**side 7, 9**)

A. Teori

Vi refererer til dele af følgende kapitler i University Physics (UP): 21, 22, 23 og 25. Det er særligt vigtigt at kende til potentialvisualiseringer (afsnit 23.4) og potential-gradienter (afsnit 23.5).

Ved øvelsen benyttes en meget simpel metode: På et stykke papir med en jævn, elektrisk ledende belægning indtegnes med en sølvpasta-pen de ønskede metalliske objekter - herefter kaldet elektroder. Sølvet er højt ledende, mens papiret i sig selv har en moderat ledningsevne. Elektroderne er derfor med god tilnærmelse ækvipotentialområder. En elektrisk jævnspændingsforskel påtrykkes og giver anledning til et 2-dimensionalt strømfelt i papirets plan. Lokalt gælder Ohm's lov: Der må være et elektrisk felt, \mathbf{E} , som overalt er proportionalt med strømtætheden, \mathbf{J} (UP lign. (25.7)). Det elektriske felt er altid vinkelret på ækvipotentiallinier, så ved med et voltmeter at udmåle sådanne kan man danne sig et billede af feltfordelingen.



Figur 1: Eksempel på elektroder på ledende papir. Her to koncentriske cirkler, hvor den inderste gives potentialet V_0 og den yderste jordes. Der fremkommer da et radiale udstrålende strømfelt fra den inderste til den yderste elektrode. C er en regnskabskurve, se ligning (1).

Kigger vi på et lille område mellem elektroderne omkranset af en kurve C (se Figur 1) kan vi nedskrive betingelsen for ladningsbevarelse (der løber lige så meget strøm ud som ind i området):

$$\oint_C \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = 0. \quad (1)$$

Her har vi udnyttet, at \mathbf{J} er en vektor som peger i strømmens retning, og som har en størrelse lig passeret ladning per areal og tid. Endvidere er d det ledende lags tykkelse, dl er et lille stykke af C og $\hat{\mathbf{n}}$ er den udadrettede enhedsnormalvektor til dl . Men da \mathbf{J} og \mathbf{E} er proportionale ($\mathbf{J} = \rho^{-1}\mathbf{E}$) og vi regner d konstant, betyder det, at

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = 0. \quad (2)$$

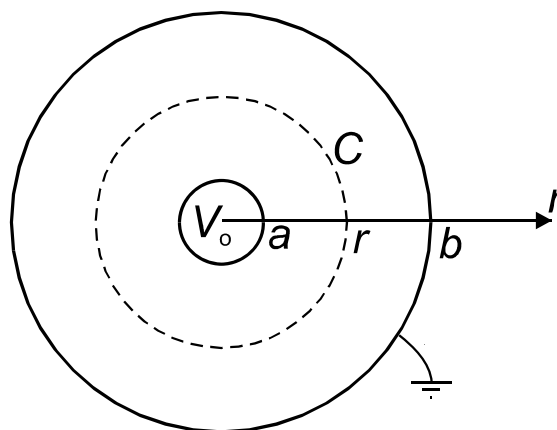
Ligning (2) genkender vi som Gauss' lov i 2 dimensioner i et ladningsfrit område. Det fortæller os, at det potentialfelt vi udmåler ved øvelsen er det samme, som det vi ville have i en tilsvarende ren elektrostatisk situation, hvor potentialet så er konstant, når man bevæger sig langs en ret linie vinkelret på planet. Den elektrostatiske analog til situationen på Figur 1 er fx en cylinderkapacitor med vakuum eller et homogent dielektrikum mellem elektroderne (se UP eksempel 24.4).

Konklusionen er altså, at vores måling på det ledende papir giver os felterne i en tilsvarende ægte 2-dimensional problemstilling i vakuum.

Opgave 1

Vi betragter igen situationen fra Figur 1, gentaget i Figur 2. Vi vælger nu en med elektroderne koncentrisk cirkel som regnskabskurve. Skitsér strømlinierne (og dermed feltlinierne) og nedskriv betingelsen for at den samlede strøm gennem C er lig I (som er ukendt, men som må være den samme for alle r mellem a og b). Vis derved, at det elektriske felt mellem elektroderne er omvendt proportionalt med r .

Find dernæst et bogstavudtryk for potentialet $V(r)$ [husk at $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$]. De kendte størrelser er V_0 , a og b . Bestem endvidere beliggenheden af ækvipotentiallinierne for 2, 4, 6 og 8 volt for $a = 2$ cm, $b = 10$ cm og $V_0 = 10$ volt.

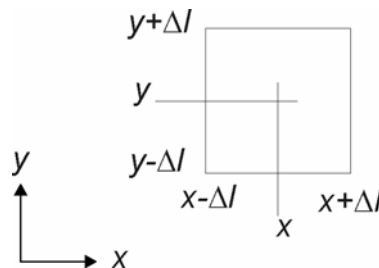


Figur 2: Elektrodekonfiguration, hvor analytisk løsning kan bestemmes

B. Simulering

Numerisk metode

Det er i nogle tilfælde simpelt at beregne de 2-dimensionale potentialfelter. Det skal I gøre i et par tilfælde og eventuelt sammenligne med tilsvarende måleresultater. Metoden kræver, at potentialet er kendt på randen af hele det plane område, som studeres. Man lægger et gitter af punkter hen over området. En celle i et sådant gitter vil typisk være kvadratisk og celle-størrelsen svarer til den opnåelige rumlige opløsning. Lad os kalde cellens kantlængde Δl . Figur 3 viser et gitterpunkt og de nærmeste 8 nabopunkter.



Figur 3: Til støtte for udledning af iterationsalgoritme

En direkte anvendelse af ligning (2) på kvadratet giver:

$$E_x(x + \Delta l, y) \cdot 2\Delta l - E_x(x - \Delta l, y) \cdot 2\Delta l + E_y(x, y + \Delta l) \cdot 2\Delta l - E_y(x, y - \Delta l) \cdot 2\Delta l \cong 0. \quad (4)$$

Men da feltkomponenterne kan tilnærmes med potentialet $V(x, y)$ ved ($\mathbf{E} = -(dV/dx, dV/dy)$):

$$E_x(x + \Delta l, y) \cong \frac{V(x, y) - V(x + \Delta l, y)}{\Delta l}, \text{ etc.}, \quad (5)$$

kan vi udtrykke Gauss' lov som følgende relation (indsæt 4 tilnærmelser af typen (5) i ligning (4) og løs for $V(x, y)$):

$$V(x, y) \cong \frac{V(x - \Delta l, y) + V(x + \Delta l, y) + V(x, y - \Delta l) + V(x, y + \Delta l)}{4}. \quad (6)$$

Det elektrostatiske potential i ladningsfrie områder har altså den simple egenskab, at potentialet i et givet punkt er lig middelværdien af potentialet i de nærmeste nabopunkter. Dette danner grundlag for en simpel iterativ procedure: Gitterpunkter på elektroderne lægges fast på de givne værdier. Alle andre punkter tillægges en begyndelsesværdi (typisk 0). Derefter gentager man beregningen i ligning (6) for alle punkter, der ikke ligger på en elektrode, indtil den ønskede nøjagtighed er opnået. For at det kan gøres, kan vi netop se, at potentialet skal være kendt på hele yderranden af området.

Algoritmen er nem at kode i et programmeringssprog, eller endnu nemmere: Et regneark i iterativ mode kan benyttes.

Numerisk beregning i Excel

Her beskriver vi, hvordan man kan foretage en hurtig numerisk beregning af potentialfordelinger i 2 dimensioner ved hjælp af Excel. Vi antager, at vi har at gøre med et rektangulært område med 10 gange 10 gitterpunkter, og at potentialet er kendt på randen.

- Åben et tomt regneark i Excel
- Gå ind i Tools > Options > Calculation og vælg manual og iteration, og sæt maximum change til 2 (maximum change er et kriterium for hvornår beregningen standser. Når den maksimale ændring i celleværdi fra iteration til iteration bliver mindre end maximum change stopper

iterationen). Den store værdi (2) betyder, at man med F9 kan se iterationerne 1 for 1. Hvis man sætter en lille værdi (fx 0,001), løbes igennem mange iterationer til en absolut nøjagtighed på ca. 0,001.

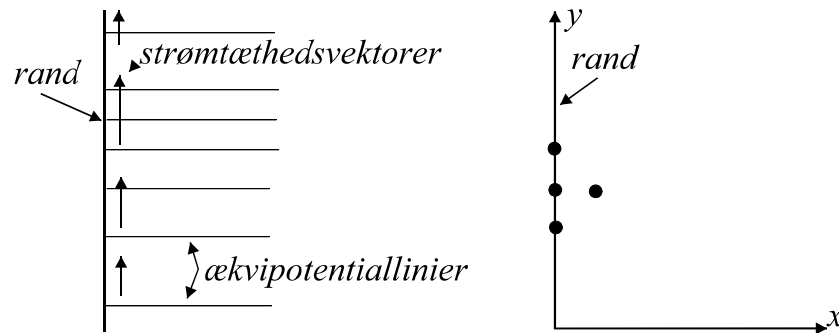
- Sæt potentialværdier ind, hvor elektroderne ligger (her vist med 0 på randen og en kvadratisk elektrode med + 10 volt):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0									0
3	0									0
4	0									0
5	0				10	10				0
6	0				10	10				0
7	0									0
8	0									0
9	0									0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Nu indtastes algoritmen, ligning (6). Man placerer sig i celle B2 og skriver $=(A2+C2+B1+B3)/4$. Formlen kopieres (ved at trække med musen) over i alle blanke felter. Der fremkommer tal svarende til første iteration. Herefter fortsætter man med F9. På et tidspunkt ændres maximum change til en lille værdi, så man kan blive færdig
- Man kan til hver en tid generere et konturplot, der viser ækvipotentiallinier med Insert > Chart>Surface. Der fremkommer et wizard, som viser vej igennem opsætningen. Man kan vælge antal linier ved at gå ind i plottets legend > format > scale (major unit)

Hvad gør man hvis man har lyst til at simulere en situation, hvor der ikke tegnes en randelektrode?

Det er lidt mere omstændeligt, men kan godt gøres. Vi ser på randen af papiret. Strømtætheden \mathbf{J} må da være rettet parallel med kanten, da strømmen ikke kan løbe ud i luften (og ej heller kan komme fra luften). Men Ohms lov siger, at det elektriske felt, \mathbf{E} , er énsrettet med \mathbf{J} . Grænsebetingelsen er altså, at normalkomponenten af \mathbf{E} i planet er nul ved randen. Da $\mathbf{E} = -\nabla V$, må den afledede af V vinkelret på randen være nul, se Figur 4.



Figur 4: Betingelser på felter, når der ikke er en elektrode på randen af området

Man kan godt indføre sådanne randbetingelser i den numeriske iteration. I nedenstående punkt på den venstre rand beregner man f_x i stedet for ligning (6):

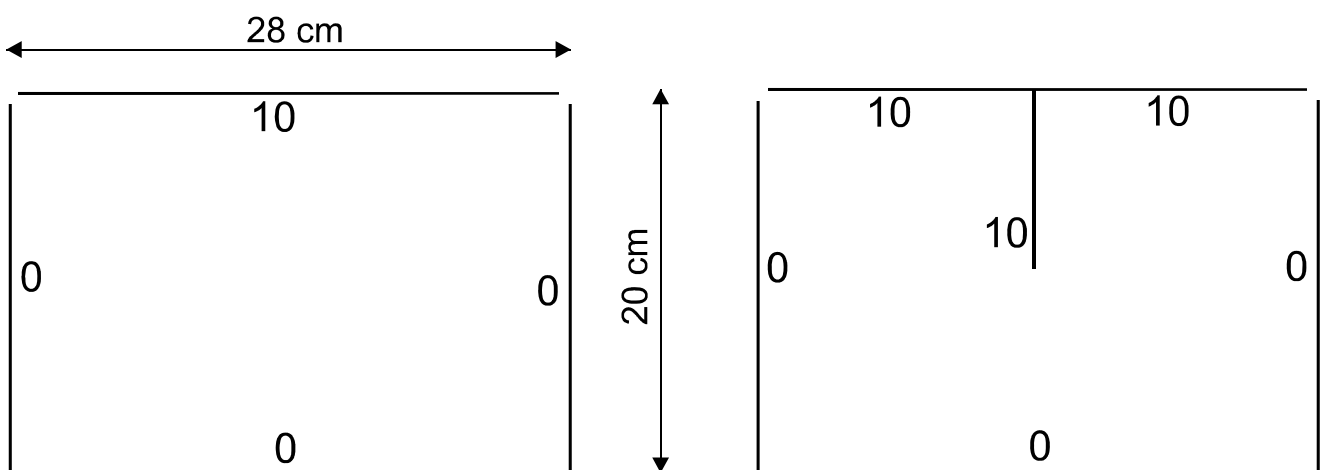
$$V(0, y) = \frac{V(0, y - \Delta l) + V(0, y + \Delta l) + 2V(\Delta l, y)}{4} . \quad (7)$$

Det svarer netop (inden for gitterapproximationen) til at V 's afledede vinkelret på y -aksen tvinges til at være 0.

Opgave 2

Udfør en numerisk bestemmelse af potentialfordelingen for de to i Figur 5 viste eksempler. Vælg et gitter med 21 gange 29 punkter (svarende til gittermærkerne på det ledende papir, der benyttes til eksperimenterne). Bemærk at eksemplet til højre blot er en udbygning af eksemplet til venstre. Man behøver altså ikke begynde forfra ved beregning nr. 2.

Det er nok at inkludere de færdig-itererede konturplot i journalen.



Figur 5: 2-dimensionale elektrodekonfigurationer til numerisk beregning og måling. Bemærk, at de øverste hjørner har åbninger i sølvmalingsen

C. Eksperiment

Beskrivelse af øvelsesopstillingen

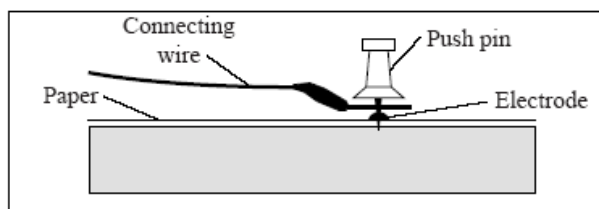
Udstyr: Papir med ledende belægning og gittermarkeringer, pen med sølvpasta, korkunderlag, nåle, forbindelsesledninger, skabeloner, blyanter til markering, tape, DC-strømforsyning, multimeter.

I forventes at opmåle 2 forskellige elektrodekonfigurationer. I kan også selv foreslå nogle. I alle tilfælde skal der indtegnes et rimelig detaljeret sæt af ækvipotentiallinier (spring på højst 2 volt). Supplér dem eventuelt et par steder med en direkte bestemmelse af feltlinier.

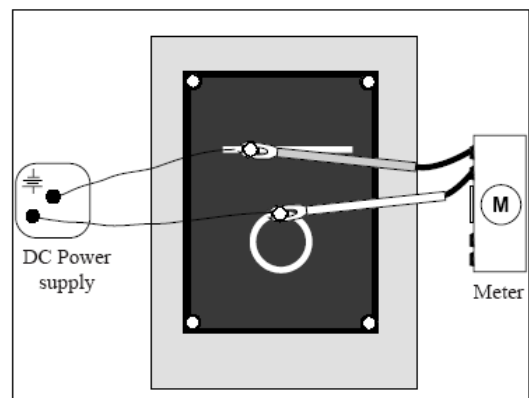
Det er vigtigt at være meget omhyggelig med tegningen af sølvelektroderne. Overvej først hvilke elektrodearrangementer I ønsker. Forslag findes bagest i vejledningen. Ryst pennen med sølvpasta kraftigt i mindst 20 sekunder. Fjern hættten. Tryk spidsen ned mod et stykke papir (hårdt underlag) samtidig med at pennen trykkes lidt sammen (så man presser pastaen ud). Når sølvet kommer fint ud, kan man tegne elektroderne op på det sorte papir (hårdt underlag). Det er vigtigt, at man får malet nogle gode jævne linjer. Der må ikke være afbrydelser eller svage punkter. Elektroderne skulle jo gerne virke som ækvipotential-områder. Det varer op til 20 minutter, før sølvpastaen er så tør, at den har sin maksimale ledningsevne. Det er derfor vigtigt, at I kommer i gang med at tegne så hurtigt som muligt. Når I er klar lægges det ledende papir på korkpladen.

Selve målingerne er simple:

1. Ved hjælp af ledninger og nåle forbindes strømforsyningens terminaler til elektroderne (Figur 6). Vælg en spænding på 10 volt.
2. Multimeteret sættes til at måle jævnspænding. Potentialer måles mellem den ene terminal på forsyningen (0 eller jord) og en ledning, der styres rundt på det ledende papir. Den frie voltmeterledning (proben) benyttes til at lokalisere og optegne ækvipotentialpunkter. Undgå at placere proben lige på gittermarkeringerne, der ikke er ledende. Begynd i hvert tilfælde med at checke elektroderne: Potentialvariationerne hen over en enkelt elektrode skal være små sammenlignet med den fulde spænding på 10 volt.
3. Ækvipotentiallinjerne optegnes med hvid blyant.

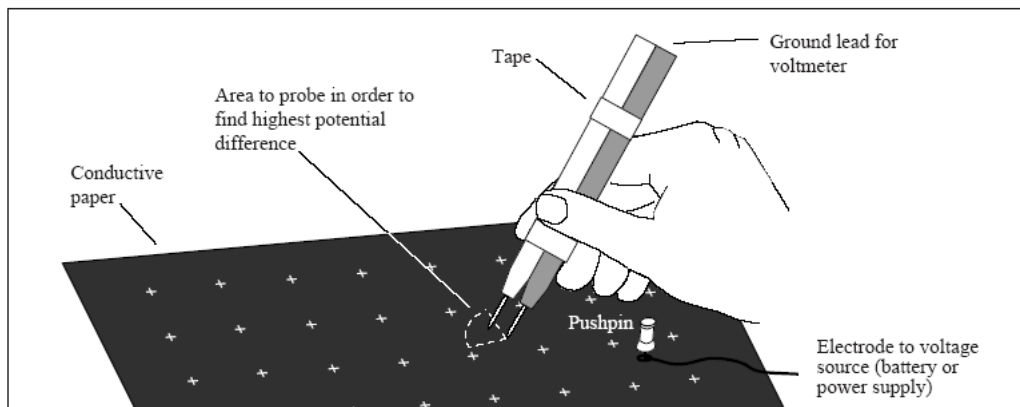


Figur 6(a) Etabler god elektrisk kontakt



(b) Opstilling, test af elektroder

4. Eventuelt bestemmes E -feltlinjer direkte. Her er det nyttigt at tape to spændings-prober til voltmeteret sammen og på et givet sted finde retningen med størst potentialforskel, se Figur 7. Feltretningen er jo netop den, hvor potentialet falder hurtigst.



Figur 7 Bestemmelse af E-feltlinier

Konklusion

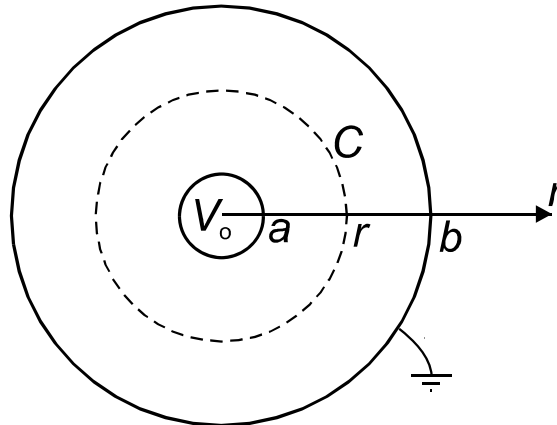
Skriv en kort konklusion. Hvor er feltet stærkest? Hvilken retning har E-feltet i forhold til potentiallinjerne. Passede resultaterne med forventningerne?

Referencer

1. *Instruction Manual and Experimental Guide for the PASCO Scientific Model PK-9023*, 1990. Findes som pdf-fil i fildeling.
2. Ekstra emne til Young: *Calculating Potentials Due to Charged Conductors*, se http://wps.aw.com/aw_young_physics_11/ (se under Extra Topics #8)

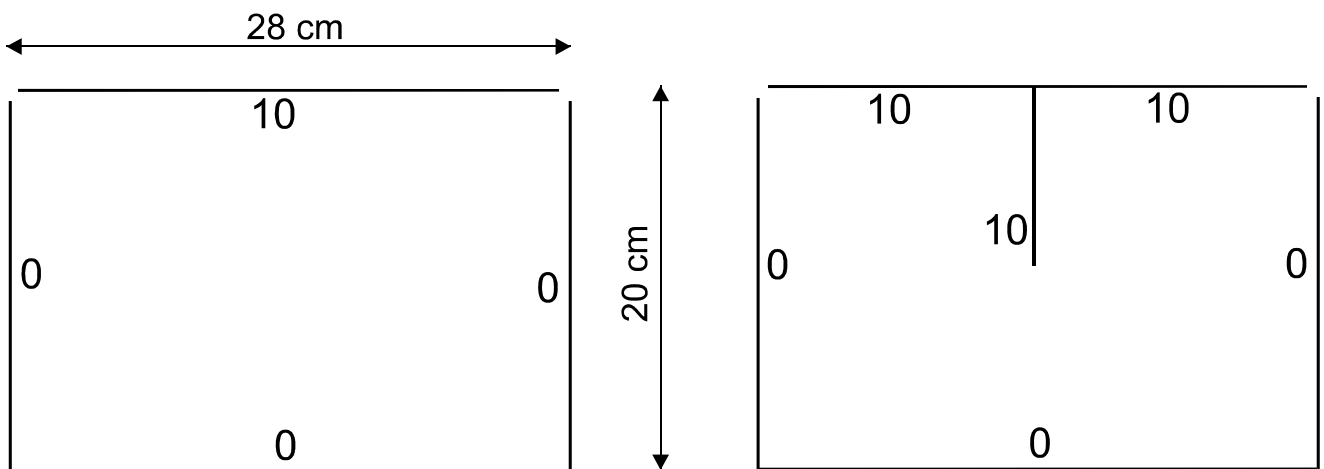
Forslag til elektrodekonfigurationer

Cylinderkapacitor



Figur 8: Elektrodekonfiguration, hvor analytisk løsning kan bestemmes. Sæt $V_0 = 10$ V, $a = 2$ cm, $b = 10$ cm. Sammenlign målte og beregnede radier for potentialværdierne 2V, 4V, 6V og 8V.

”Værelse med halv skillevæg”



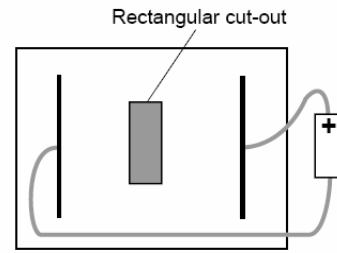
Figur 9a og b: Bemærk, at de øverste hjørner har åbninger i sølvmalingen. Sammenlign eventuelt med simulering.

Flydende elektrode



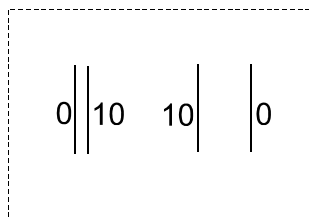
Figur 10a: Rammen er ikke en elektrode, men papirets kant. Før den cirkulære elektrode tegnes findes ækvipotentialkurver for de to retlinjede elektroder. Tegn den cirkulære elektrode og find igen ækvipotentialer. På hvilken måde forvrænger den cirkulære elektrode feltet?

Flydende isolator



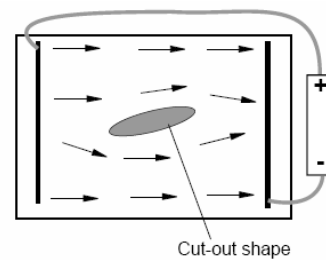
Figur 10b: Rammen er ikke en elektrode, men papirets kant. Før det rektangulære snit skæres ud, tegnes ækvipotentialkurver for de to retlinjede elektroder. Skær et rektangulært stykke ud af papiret og mål igen ækvipotentialkurver. På hvilken

Pladekapacitor



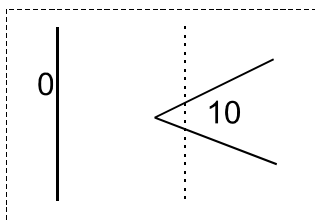
Figur 11: Pladekondensatorlignende. Sæt kun ledninger på et sæt linier af gangen. Sammenlign feltstyrker mellem linierne og uden for linierne. Hvilket sæt har det mest markante spredningsfelt?

Fluidmekanisk analogi

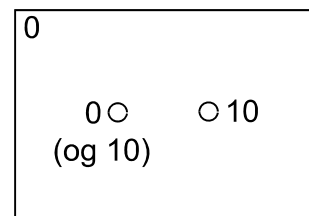


Figur 12: Rammen er ikke en elektrode, men papirets kant. Mange fluide systemer opfylder Laplaces ligninger ligesom det elektrisk potential. Feltlinjerne svarer til strømlinjerne for et rotationsfrit, usammentrykkeligt fluid.

Dipol



Figur 13: Udmål først felterne fra den lodrette linie og spidsen. Mål også "bag om" vinkelåbningen. Tilføj derefter den prikkede linie (helt optrukket i sølvmaaling) og mål igen. Kommenter ændringerne



Figur 14: Prøv først uden rammeelektrode. Mål både med 0 og 10 volt på cirklerne, og situationen hvor der er 10 volt på dem begge. Sammenlign med lærebogen afsnit 21.6.