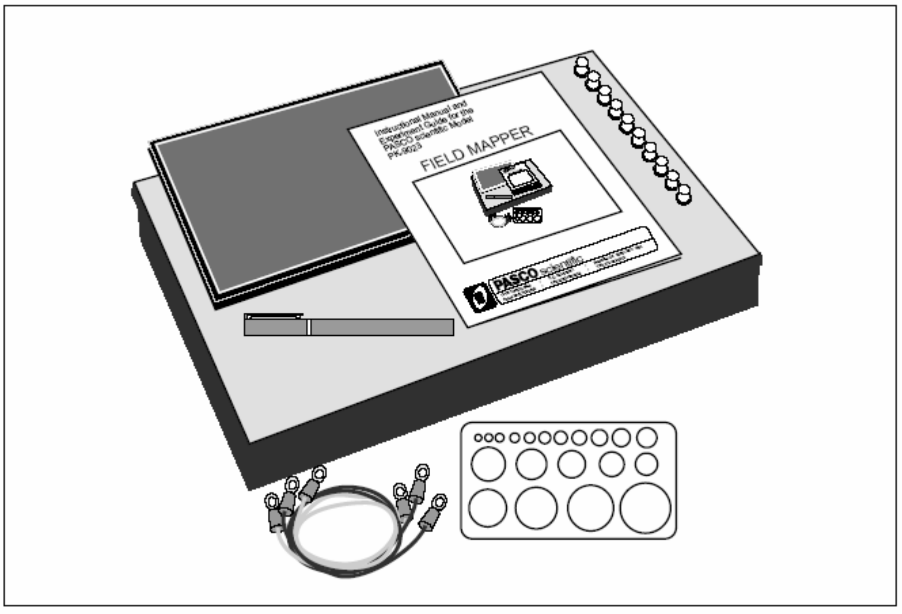
# 10036 ELEKTROMAGNETISME FOR FYSIKERE

# ØVELSE 1

## ELEKTROSTATIK I TO DIMENSIONER

| | |
|---|---|
| **Placering:** | Bygning 307, Rum 009 |
| **Relevant tekst i Griffiths:** | Kapitel 2 og 3 (især 2.2, 2.3, 2.5, 3.1) samt afsnit 7.1.1 |
| **Supplerende læsning:** | University Physics, 11th ed., kap. 21, 22 (især 22.3), 23 (især 23.4 og 23.5) og 25 |




**VIGTIGT: GÅ HURTIGT I GANG MED AT TEGNE ELEKTRODER !**

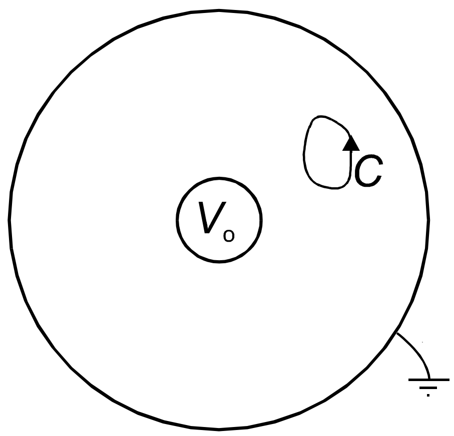
## *Baggrund*

Øvelsen har til formål at give deltagerne en vis fortrolighed med elektrostatiske felter og potentialer og deres indbyrdes sammenhæng. I arbejder med de felter, som fremkommer mellem metalliske objekter med veldefinerede potentialer (spændinger). Den type problemer kan være vanskelige at løse fordi ladningsfordelingen på overfladen af metallerne ikke uden videre er kendt. Man kan altså ikke bestemme felt/potential direkte ude fra Coulombfeltet og superposition. Den praktiske øvelse og de tilhørende beregninger begrænser sig til 2-dimensionale systemer, men mange resultater kan uden videre - i hvert fald kvalitativt - generaliseres til 3 dimensioner og dermed mange praktiske situationer.

## *Teori*

Vi refererer til dele af kapitel 2, 3 og 7 i Griffiths. Det er særligt vigtigt at kende til potential-visualiseringer (gode illustrationer i University Physics, afsnit 23.4) og potential-gradienter (UP afsnit 23.5).

Ved øvelsen benyttes en meget simpel metode: På et stykke papir med en jævn, elektrisk ledende belægning indtegnes med en sølvpasta-pen de ønskede metalliske objekter - herefter kaldet elektroder. Sølvet er højt ledende, mens papiret i sig selv har en moderat ledningsevne. Elektroderne er derfor med god tilnærmelse ækvipotentialområder. En elektrisk jævnspændingsforskel påtrykkes og giver anledning til et 2-dimensionalt strømfelt i papirets plan. Lokalt gælder Ohm's lov: Der må være et elektrisk felt, **E**, som overalt er proportionalt med strømtætheden, **J** (Griffiths lign. (7.3)). Det elektriske felt er altid vinkelret på ækvipotentiallinier, så ved med et voltmeter at udmåle sådanne kan man danne sig et billede af feltfordelingen.




**Figur 1:** Eksempel på elektroder på ledende papir. Her to koncentriske cirkler, hvor den inderste gives potentialet $V_o$ og den yderste jordes. Der fremkommer da et radialt udstrålende strømfelt fra den inderste til den yderste elektrode. *C* er en regnskabskurve, se ligning (1).

Kigger vi på et lille område mellem elektroderne omkranset af en kurve C (se Figur 1) kan vi nedskrive betingelsen for ladningsbevarelse (der løber lige så meget strøm ud som ind i området):

$$\oint_C \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\, dl = 0. \qquad (1)$$

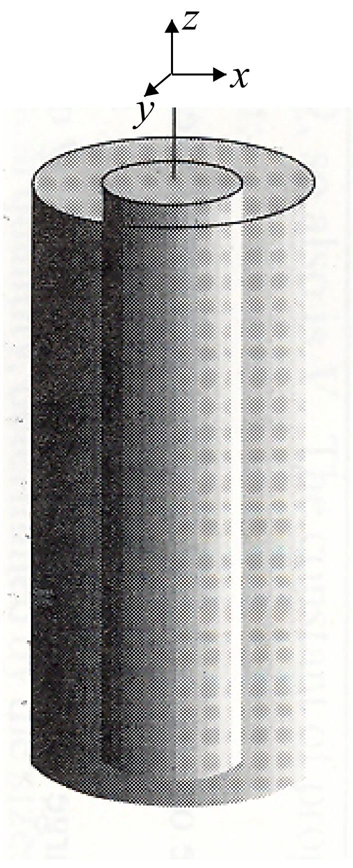
Her har vi udnyttet, at **J** er en vektor som peger i strømmens retning, og som har en størrelse lig passeret ladning per areal og tid. Endvidere er $d$ det ledende lags tykkelse, $dl$ er et lille stykke af $C$ og $\hat{\mathbf{n}}$ er den udadrettede enhedsnormalvektor til $C$. Men da **J** og **E** er proportionale og vi regner $d$ konstant, betyder det, at

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dl = 0. \tag{2}$$

Ligning (2) genkender vi som Gauss' lov i 2 dimensioner i et ladningsfrit område. Hvordan skal det nu forstås? Vi er kun vant til Gauss's lov i 3 dimensioner. Men forestil jer, at papiret med sølvelektroder erstattes af uendelige koncentriske metalcylindre vinkelret på papirplanet, hvis overflader skærer planet præcis i sølvelektroderne, se Figur 2.

Anbring dem i vakuum og sæt spændinger på som før. Det følger da af symmetrien, at man får et elektrisk felt, som ikke afhænger af positionen langs cylindrene (z-koordinaten) og som overalt er vinkelret på cylindrene. Så kan vi supplere (2) med en længde $L$ langs cylinderaksen og gå til et fladeintegral ved at tilføje bund og låg:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,L\,dl = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = 0. \tag{3}$$




**Figur 2:** Elektrostatisk analog til strømfeltet i situationen i Figur 1 (cylinderkapacitor). Mens strømfeltet kun eksisterer i et plan, er det analoge elektriske felt udstrakt i rummet, men uden $z$-afhængighed og med $E_z = 0$

Her har vi udnyttet, at **E** og $d\mathbf{a}$ er vinkelret på hinanden i bund- og topfladerne. Gauss' lov er altså opfyldt i de ladningsfrie områder, og samtidig er grænsebetingelserne analoge: Det elektriske felt er vinkelret på metaloverfladerne svarende til, at disse er ækvipotentialflader. En anden måde, at beskrive situationen på, er at Laplace's ligning i 2 dimensioner er opfyldt i begge situationer. Da grænsebetingelserne er de samme, fortæller éntydigheden os, at det 2-dimensionale felt er det samme (jvf. Griffiths, afsnit 3.1)

Konklusionen er altså, at vores måling på det ledende papir giver os felterne i en tilsvarende ægte 2-dimensional problemstilling i vakuum.

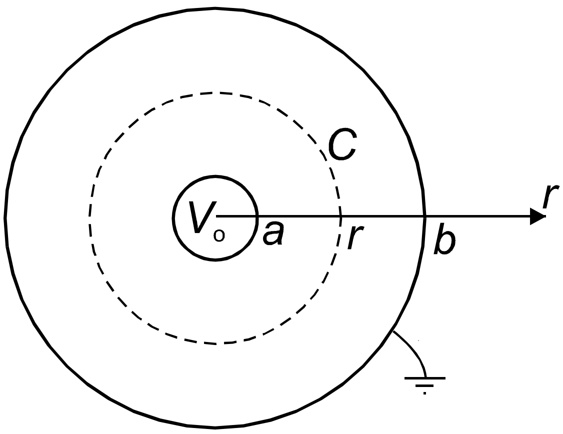
## Opgaver

Den teoretiske og den numeriske opgave skal løses og indgå i journalen. En PC med Excel og Wordpad er til rådighed.

**Opg. 1**

Vi betragter igen situationen fra Figur 1, gentaget i Figur 3. Vi vælger nu en med elektroderne koncentrisk cirkel som regnskabskurve. Skitsér strømlinierne (og dermed feltlinierne) og nedskriv betingelsen for at den samlede strøm gennem $C$ er lig $I$ (som er ukendt, men som må være den samme for alle $r$ mellem $a$ og $b$. Vis derved, at det elektriske felt mellem elektroderne er omvendt proportionalt med $r$.

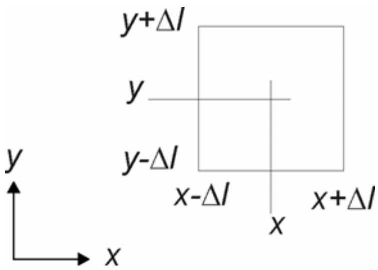
Find dernæst et bogstavudtryk for potentialet $V(r)$ [husk at $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$]. De kendte størrelser er $V_o$, $a$ og $b$. Bestem endvidere beliggenheden af ækvipotentiallinierne for 2, 4, 6 og 8 volt for $a$ = 2 cm, $b$ = 10 cm og $V_o$ = 10 volt.




**Figur 3:** Elektrodekonfiguration, hvor analytisk løsning kan bestemmes

### Numerisk metode

Det er i nogle tilfælde simpelt at beregne de 2-dimensionale potentialfelter ved hjælp af den såklaldte relaxationsmetode (Griffiths, afsnit 3.1.3). Det skal I gøre i et par tilfælde for derefter at sammenligne med tilsvarende måleresultater. Metoden kræver, at potentialet er kendt på randen af hele det plane område, som studeres. Man lægger et gitter af punkter hen over området. En celle i et sådant gitter vil typisk være kvadratisk og celle-størrelsen svarer til den opnåelige rumlige opløsning. Lad os kalde cellens kantlængde $\Delta l$. Figur 4 viser et gitterpunkt og de nærmeste 8 nabopunkter.




**Figur 4:** Til støtte for udledning af iterationsalgoritme

En direkte anvendelse af ligning (2) på kvadratet giver:

$$E_x(x+\Delta l,y)\cdot 2\Delta l - E_x(x-\Delta l,y)\cdot 2\Delta l + E_y(x,y+\Delta l)\cdot 2\Delta l - E_y(x,y-\Delta l)\cdot 2\Delta l \cong 0. \tag{4}$$

Men da feltkomposanterne kan tilnærmes med potentialet $V(x, y)$ ved ($\mathbf{E} = -(dV/dx, dV/dy)$):

$$E_x(x+\Delta l,y) \cong \frac{V(x,y)-V(x+\Delta l,y)}{\Delta l}, \text{ etc.,} \tag{5}$$

kan vi udtrykke Gauss' lov som følgende relation (indsæt 4 tilnærmelser af typen (5) i ligning (4) og løs for $V(x, y)$):

$$V(x,y) \cong \frac{V(x-\Delta l,y)+V(x+\Delta l,y)+V(x,y-\Delta l)+V(x,y+\Delta l)}{4}. \tag{6}$$

Samme resultat kan selvfølgelig også udledes fra Laplace-ligningen ved at approksimere de partielle afledede.

Det elektrostatiske potential i ladningsfrie områder har altså den simple egenskab, at potentialet i et givet punkt er lig middelværdien af potentialet i de nærmeste nabopunkter (gælder endda mere generelt, se Griffiths afsnit 3.1.3). Dette danner grundlag for en simpel iterativ procedure: Gitterpunkter på elektroderne lægges fast på de givne værdier. Alle andre punkter tillægges en begyndelsesværdi (typisk 0). Derefter gentager man beregningen i ligning (6) for alle punkter, der ikke ligger på en elektrode, indtil den ønskede nøjagtighed er opnået. For at det kan gøres, kan vi netop se, at potentialet skal være kendt på hele yderranden af området. Algoritmen er nem at kode i et programmeringssprog, eller endnu nemmere: Et regneark i iterativ mode kan benyttes.

## Numerisk beregning i Excel

Her beskriver vi, hvordan man kan foretage en hurtig numerisk beregning af potentialfordelinger i 2 dimensioner ved hjælp af Excel. Vi antager, at vi har at gøre med et rektangulært område med 10 gange 10 gitterpunkter, og at potentialet er kendt på randen.

- Åben et tomt regneark i Excel
- Gå ind i Tools > Options > Calculation og vælg manual og iteration, og sæt maximum change til 2 (maximum change er et kriterium for hvornår beregningen standser. Når den maksimale ændring i celleværdi fra iteration til iteration bliver mindre end maximum change stopper iterationen). Den store værdi (2) betyder, at man med F9 kan se iterationerne 1 for 1. Hvis man sætter en lille værdi (fx 0,001), løbes igennem mange iterationer til en absolut nøjagtighed på ca. 0,001.

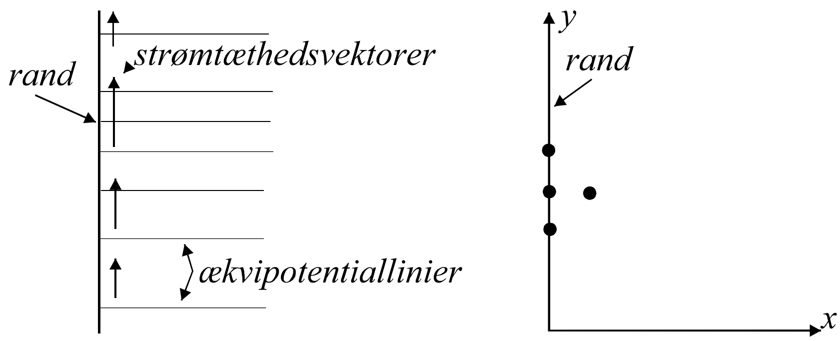
- Sæt potentialværdier ind, hvor elektroderne ligger (her vist med 0 på randen og en kvadratisk elektrode med + 10 volt):

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | | | | | | | | | 0 |
| **3** | 0 | | | | | | | | | 0 |
| **4** | 0 | | | | | | | | | 0 |
| **5** | 0 | | | | 10 | 10 | | | | 0 |
| **6** | 0 | | | | 10 | 10 | | | | 0 |
| **7** | 0 | | | | | | | | | 0 |
| **8** | 0 | | | | | | | | | 0 |
| **9** | 0 | | | | | | | | | 0 |
| **10** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- Nu indtastes algoritmen, ligning (6). Man placerer sig i celle B2 og skriver =(A2+C2+B1+B3)/4. Formlen kopieres (ved at trække med musen) over i alle blanke felter. Der fremkommer tal svarende til første iteration. Herefter fortsætter man med F9. På et tidspunkt ændres maximum change til en lille værdi, så man kan blive færdig
- Man kan til hver en tid generere et konturplot, der viser ækvipotentiallinier med Insert > Chart. Der fremkommer er wizard, som viser vej igennem opsætningen. Man kan vælge antal linier ved at gå ind i plottets legend > format > scale (major unit)

**Hvad gør man hvis man har lyst til at simulere en situation, hvor der ikke tegnes en randelektrode?**

Det er lidt mere omstændeligt, men kan godt gøres. Vi ser på randen af papiret. Strømtætheden **J** må da være rettet parallel med kanten, da strømmen ikke kan løbe ud i luften (og ej heller kan komme fra luften). Men Ohms lov siger, at det elektriske felt, **E**, er énsrettet med **J**. Grænsebetingelsen er altså, at normalkomposanten af **E** i planet er nul ved randen. Da **E** = -∇$V$, må den afledede af $V$ vinkelret på randen være nul, se Figur 5.




**Figur 5:** Betingelser på felter, når der ikke er en elektrode på randen af området

Man kan godt indføre sådanne randbetingelser i den numeriske iteration. I nedenstående punkt på randen beregner man fx i stedet for ligning (6):

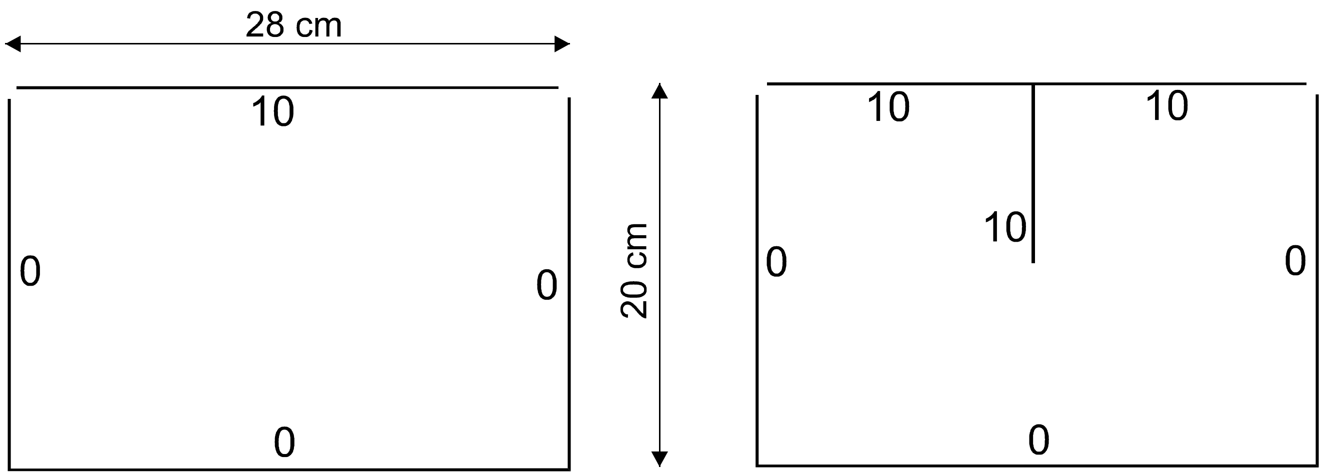
$$V(0,y) = \frac{V(0,y-\Delta l)+V(0,y+\Delta l)+2V(\Delta l,y)}{4} \quad .$$

Det svarer netop (inden for gitterapproksimationen) til at $V$'s afledede vinkelret på $y$-aksen tvinges til at være 0.

**Opg. 2**

Udfør en numerisk bestemmelse af potentialfordelingen for de to i Figur 6 viste eksempler. Vælg et gitter med 21 gange 29 punkter (svarende til gittermærkerne på det ledende papir, der benyttes til eksperimenterne). Bemærk at eksemplet til højre blot er en udbygning af eksemplet til venstre. Man behøver altså ikke begynde forfra ved beregning nr. 2.

Det er nok at inkludere de færdig-itererede konturplot i journalen.



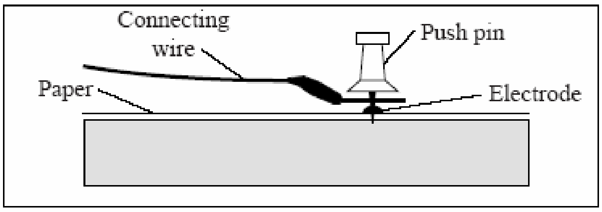

**Figur 6:** 2-dimensionale elektrodekonfiguratoner til numerisk beregning og måling. Bemærk, at de øverste hjørner har åbninger i sølvmalingen

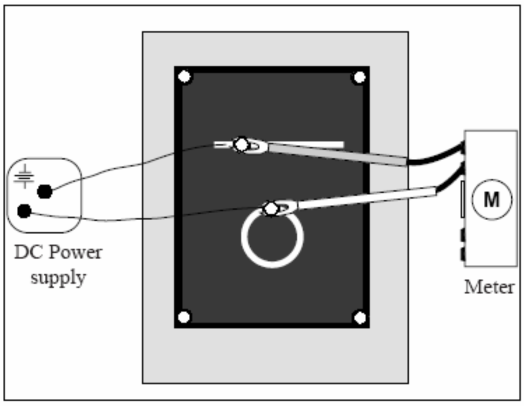
## *Beskrivelse af øvelsesopstillingen*

Udstyr: Papir med ledende belægning og gittermarkeringer, pen med sølvpasta, korkunderlag, nåle, forbindelsesledninger, skabeloner, blyanter til markering, tape, DC-strømforsyning, multimeter.

Det er vigtigt at være meget omhyggelig med tegningen af sølvelektroderne. Overvej først hvilke elektrodearrangementer I ønsker. Tegn dem op på almindeligt papir. Dernæst tager I et stykke af det ledende papir og fastgør det på et underlag (brug fx nåle og korkpladen). Ryst pennen med sølvpasta kraftigt i mindst 20 sekunder. Fjern hætten. Tryk spidsen ned mod et stykke papir samtidig med at pennen trykkes lidt sammen (så man presser pastaen ud). Når sølvet kommer fint ud, kan man tegne elektroderne op på det sorte papir. Det er vigtigt, at man får malet nogle gode jævne linier. Der må ikke være afbrydelser eller svage punkter. Elektroderne skulle jo gerne virke som ækvipotentialområder. Det varer op til 20 minutter, før sølvpastaen er så tør, at den har sin maksimale ledningsevne. Det er derfor vigtigt, at I kommer i gang med at tegne så hurtigt som muligt.

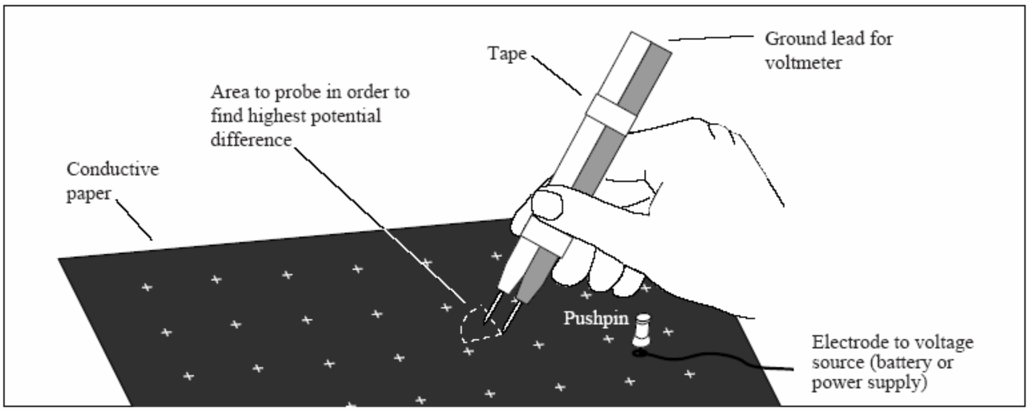
Selve målingerne er simple. Ved hjælp af ledninger og nåle forbindes strømforsyningens terminaler til elektroderne (Figur 7). Vælg en spænding på 10 volt. Multimeteret sættes til at måle jævnspænding. Potentialer måles mellem den ene terminal på forsyningen og en ledning, der styres rundt på det ledende papir. Begynd i hvert tilfælde med at checke elektroderne: Potentialvariationerne hen over en enkelt elektrode skal være små sammenlignet med den fulde spænding på 10 volt.




**Figur 7(a)** Etabler god elektrisk kontakt **(b)** Opstilling, test af elektroder

Systematiske målinger kan foretages på to måder. Den frie voltmeterledning benyttes til at lokalisere og optegne ækvipotentiallinier. Undgå at placere den lige på gittermarkeringerne, der ikke er ledende. Endvidere kan man direkte bestemme **E**-feltlinier. Her er det nyttigt at tape to spændings-prober til voltmeteret sammen og på et givet sted finde retningen med størst potentialforskel, se Figur 8. Feltretningen er jo netop den, hvor potentialet falder hurtigst.



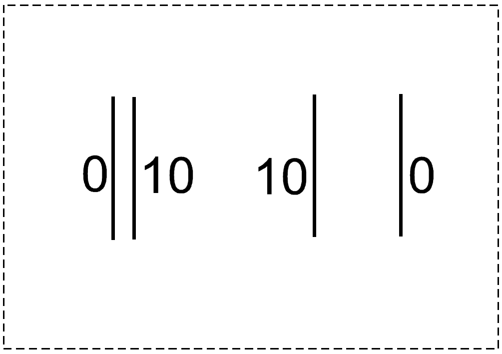

**Figur 8** Bestemmelse af **E**-feltlinier

## *Vejledning til eksperimentel del:*

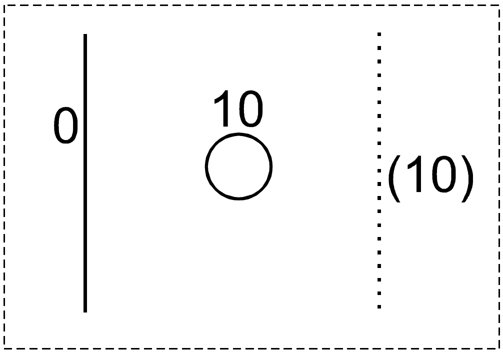
I forventes at opmåle 4-5 elektrodekonfigurationer, nogle af dem i forskellige udgaver. Alle skal arbejde med de eksperimentelle udgaver af opgave 1 (1 konfiguration) og opgave 2 (2 konfigurationer). De øvrige kan vælges blandt nedenstående forslag. I kan også selv foreslå nogle (aftales med vejlederen). I alle tilfælde skal der indtegnes et rimelig detaljeret sæt af ækvipotentiallinier (spring på højst 1 volt). Supplér dem et par steder med en direkte bestemmelse af feltlinier.

Potentialkortene vedhæftes journalen. I alle tilfælde gives en kort diskussion af hvad I ser (For opgave 1 og 2 sammenlignes med det teoretisk forventede, for de øvrige se nedenfor).

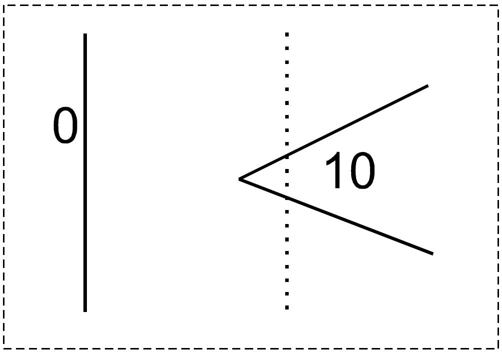
Forslag til eksperimenter:



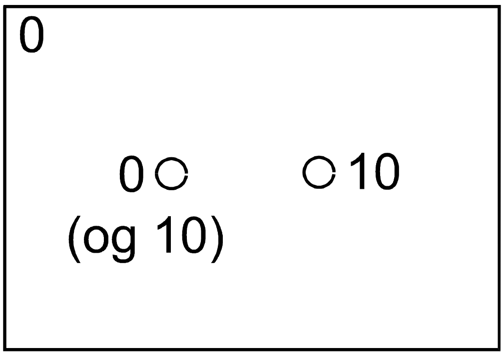

Figur 9: Pladekondensatorlignende. Sæt kun ledninger på et sæt linier af gangen. Sammenlign feltstyrker mellem linierne og uden for linierne. Hvilket sæt har det mest markante spredningsfelt?




Figur 10: Mål først linie/cirkel. Tilføj derefter den prikkede linie (helt optrukket i sølvmaling), lad den tørre og flyt de 10 volt over på den (cirklen lades uforbunden). Beskriv ændringen i potential og feltfordeling.




Figur 11: Udmål først felterne fra den lodrette linie og spidsen. Tilføj derefter den prikkede linie (helt optrukket i sølvmaling) og mål igen. Kommenter ændringerne




Figur 12: Mål både med hhv. 0 og 10 volt på cirklerne, og med 10 volt på dem begge. Sammenlign lærebogen p. 66 (der dog skitserer en 3D situation med punktladninger)..

## Konklusion

Skriv en kort konklusion i journalen. Hvad har I fået ud af øvelsen? Passede resultaterne med forventningerne?

## Referencer


1. Instruction Manual and Experimental Guide for the PASCO Scientific Model PK-9023, 1990. Findes som pdf-fil i fildeling (materiale til øvelser)

2. Ekstra emne til Young: Calculating Potentials Due to Charged Conductors, se http://wps.aw.com/aw_young_physics_11/ (se under Extra Topics #8)