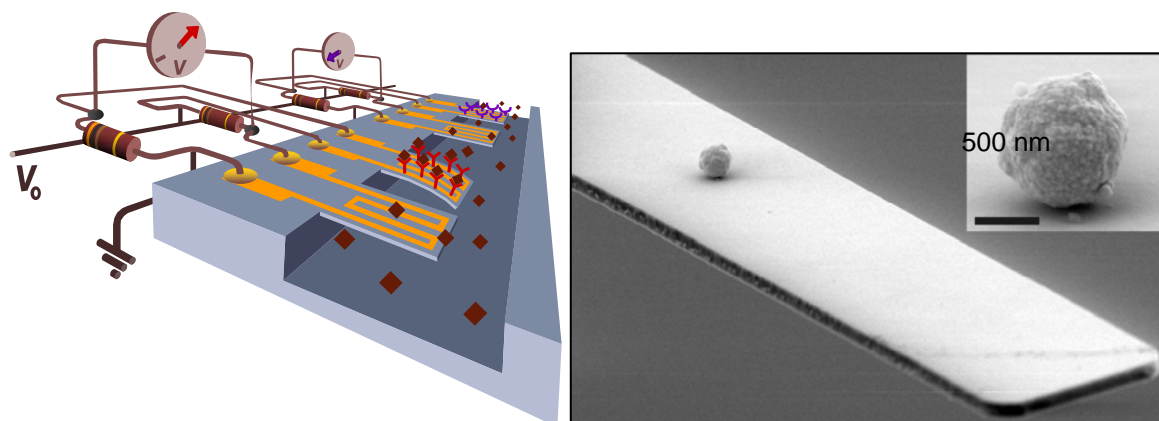


PARTIKELVÆGT – fra svingende linealer til chip-laboratoriet i lægeværelset

Øvelsen forudsætter kendskab til svingningstiden for harmonisk svingning (Fysik A-niveau). Øvelsen kan også udføres af ingeniørstuderende, som kender diff. ligninger og lineær algebra.

Øvelsen handler om vejning ved hjælp af svingninger. Du kender måske fænomenet fra legepladsen, hvor man kan sætte sig på fjedrende dyr. Jo tungere man er, desto langsommere svinger systemet. Astronauter bruger denne metode, når de skal veje sig i rummet i vægtløs tilstand, hvor en badevægt ikke fungerer.

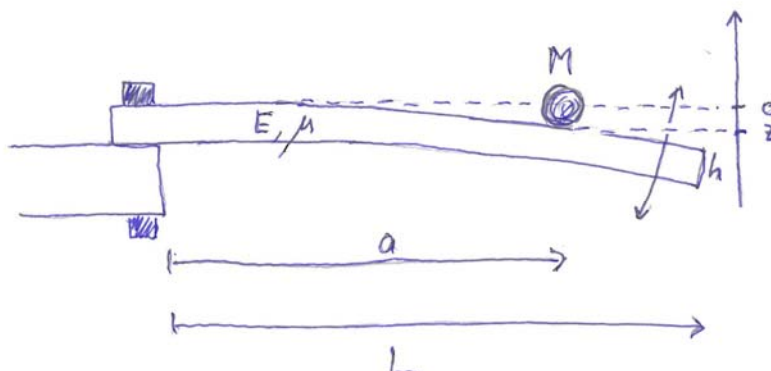
På mikroplan kan princippet bruges til vejning af meget små stofmængder, der kan være småpartikler eller biologisk interessante molekyler. Stoffet sættes på en lille bjælke (*bladfjeder*, eng. *cantilever*), som sættes i svingning. Når bjælkens fjederkonstant kendes, kan massen af stoffet beregnes ud fra svingningstiden. Svingningstiden måles ved hjælp af strain gauges, som er trækfølsomme modstande, der er klistret fast på bjælken. På figur 1 er princippet illustreret i en partikelvægt til indbygning i et chip-laboratorium (Lab-on-a-chip), som lægen kan have til blodprøvetest, så man undgår at skulle sende prøven til hospitalet og vente på svar. På hver bjælke sidder forskellige antistoffer, der binder specifikke molekyler, som man er interesseret i. Når molekyler bindes til en bjælke, vokser dens svingningstid, og man kan veje stofmængden og dermed bestemme koncentrationen af stoffet i blodet. Ideen er, at chip-laboratoriet skal masseproduceres, så der eventuelt kan blive tale om engangsudstyr, hvor man sparer omkostninger til sterilisering.



Figur 1. Partikelvægt til chip-laboratorium. En blodprøve skylles gennem kanalen og bjælker med specifikke modtagere (antistoffer) opfanger specifikke molekyler. Nedbøjningen af bjælkerne måles med strækningsfølsomme modstande ("tøjningsmålere", eng. strain gauges). Tøjningsmålerne er de snoede orangegule ledningsbaner. Figur 2. Bladfjeder med mikropartikel.

Opstilling

I Nanoteket skal du måle på en makroskopisk model af systemet. Bjælken udgøres af en lineal fastspændt til et bord. På linealen kan et jernlod fastgøres i forskellige positioner med magneter. Jernlodet forestiller den partikel eller det molekyle man vil veje. Tøjningsmålere (strain gauges) er pålimet på oversiden og på undersiden af linealen og koblet elektrisk i en Wheatstone-bro med to andre modstande. Systemet sættes i svingning og svingningstiden måles ud fra den variende spænding over oversidens og undersidens tøjningsmålere. Ved hjælp af svingningstiden kan masse eller position af jernlodet bestemmes.



Figur 3a. Svingende bjælke med benyttede symboler. Nedbøjningen z måles ved M

Teori

Svingningstiden T for systemet opfylder med god tilnærmelse

$$T^2 = \frac{16\pi^2 Ma^3}{Eb^3} + \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 Eb^3}, \quad \text{hvor} \quad (1)$$

M = partiklens masse

a = partiklens afstand fra fastspændingsstedet

E = bjælkens *elasticitetsmodul* = 16 GPa for ask, 14 for bøg, begge langs årene

b = bjælkens bredde

h = bjælkens højde

μ = bjælkens masse pr. længdeenhed

L = bjælkens frie længde

$\alpha = 1,875$ er den mindste løsning til ligningen $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$

Udledelsen af udtrykket for T er givet nedenfor. Blandt andet indgår, at nedbøjningen z af bjælken målt ved partiklens position a i ligevægtstilstanden (hvile) afhænger af a i 3. potens.

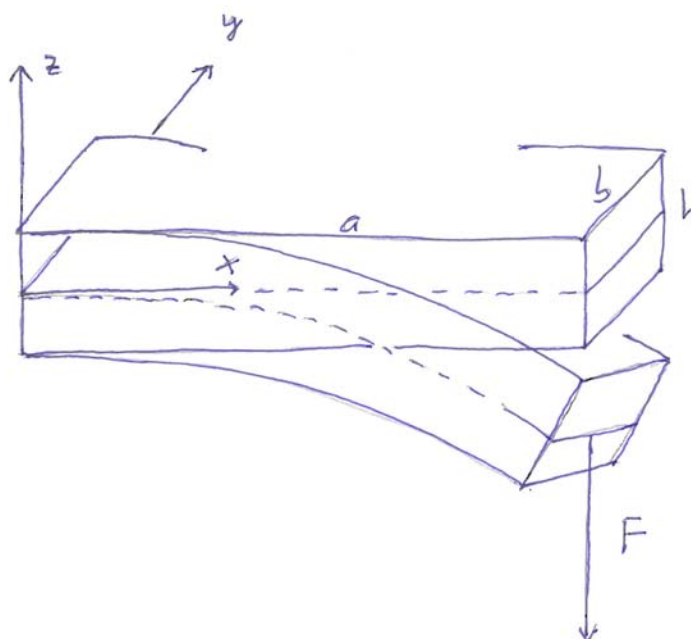
$$z = \frac{4Mg}{Eb^3} a^3, \quad g = 9,82 \text{ N/kg} \quad (2)$$

Forsøgets udførelse

1. Nedbøjningens afhængighed af partikelpositionen (2) undersøges eksperimentelt i en separat opstilling og en foreløbig værdi for E bestemmes.
2. For den fastspændte lineal måles svingningstiden uden partikel og en ny værdi for E bestemmes fra (1).
3. Svingningstiden for fast L undersøges for varierende masse, hhv. position af kendt partikel.
4. Plot (M, T^2) og (a^3, T^2) og bestem fitteparametre.
5. En ukendt partikel placeres på kendt sted, svingningstiden måles og massen beregnes
6. En kendt partikel placeres på ukendt sted, svingningstiden måles og positionen beregnes.
7. Eventuelt: Teori og måling udvides til at omfatte flere partikler på en gang.

Konklusion: Er teorien fornuftig? Hvor nøjagtigt kan man skelne?

Teori for SVINGENDE BJÆLKE. Gymnasieniveau



Figur 3b. Nedbøjning af en bjælke fastspændt i den ene ende og belastet i den anden.

Forestil dig en målestok (trælineal), der er spændt fast vandret på et bord, så den rager ud over kanten. Det tekniske udtryk er en *homogen bjælke*. En klump (partikel) lægges på linealen. I den situation viser sig at gælde for små nedbøjninger^{1,3)}, at hvis bjælken påvirkes af en kraft F i afstanden a fra fastspændingsstedet, vil nedbøjningen z være

$$z = \frac{F}{E \cdot I} \frac{a^3}{3}, \quad (3)$$

hvor E er materialets *elasticitetsmodul* (dvs. den indre spænding er $E \cdot \Delta L / L$ ved en relativ forlængelse $\Delta L / L$) og I er tværsnittets *inertimoment* (omkring en vandret akse midt i målestokken). I er defineret som

$$I = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, \quad (4)$$

hvor b er bjælkens bredde og h er dens højde.

Opgave 1: a. Vis at $I = \frac{1}{12}bh^3$. (5)

b. Beregn den indre spænding i ask for en relativ forlængelse på 1%.

Opgave 2: Gør rede for at sammenhængen mellem kraft og nedbøjning i (3) er som for en *elastisk kraft* med fjederkonstant $k = EI \frac{3}{a^3}$. (6)

Svingningstiden for systemet, hvis der kun tages hensyn til klumpens masse og bjælkens stivhed.

Fra teorien for harmonisk svingning af en fjeder med lod kendes svingningstiden

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}, \quad (7)$$

hvor M er massen af det legeme, der svinger i fjederen.

Opgave 3: Benyt (7), (6) og (5) til at vise, at

$$T_1^2 = \frac{16\pi^2 Ma^3}{Ebh^3}. \quad (8)$$

Svingningstiden for systemet, hvis der kun tages hensyn til bjælkens masse og stivhed

For en homogen bjælke, er *vinkel-egenfrekvensen* $\omega = 2\pi f$ - hvor f er *frekvensen* – givet²⁾ ved

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{L^4 \mu}, \quad (9)$$

hvor $\alpha = 1,875\dots$ er den mindste løsning til ligningen $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$, mens L er bjælkens længde og μ er dens masse pr. længdeenhed.

Fra teorien for harmonisk svingning kendes sammenhængen mellem *vinkelfrekvens* og svingningstid T_L

$$\omega \cdot T_L = 2\pi, \quad (10)$$

hvor T_L her er svingningstiden for en bjælke med fri længde L .

Opgave 4: Vis at

$$T_L^2 = \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 E b h^3}. \quad (11)$$

Ved at indføre bjælkens *massefylde* ρ og *tværsnitsareal* A , kan dette eventuelt omskrives til

$$T_L^2 = \frac{48\pi^2 \rho L^4}{\alpha^4 E h^2}. \quad (12)$$

Opgave 5: Vis dette. Vink: Brug $\mu = m/L$, hvor m er bjælkens masse, som kan findes ud fra dens massefylde og dens rumfang. Bemærk af (12), at breddeafhængigheden i (11) kun er tilsyneladende.

Svingningstid for bjælke med masseklump

Vi benytter Dunkerleys princip (1895) for svingende systemer bestående af en aksel med skiver på. Akslen svarer til bjælken og skiverne svarer til de partikler, man lægger på den. Dunkerleys princip udtaler sig om den laveste egenfrekvens for det svingende system. Man har^{2,5,6)}

$$\frac{1}{\omega^2} \cong \frac{1}{\omega_a^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}, \quad (13)$$

hvor

ω_a = vinkel-egenfrekvensen for systemet, hvis der kun tages hensyn til bjælkens masse og stivhed

ω_i = vinkel-egenfrekvensen for systemet, hvis der kun tages hensyn til den i 'te partikels masse og bjælkens stivhed.

For en bjælke understøttet i begge ender og med en klump med masse M på midten er fejlen størst for $M/m = 0.5$, hvor $m = \mu L$ er massen af bjælken. Fejlen på egenfrekvensen ω er da kun 0,2 %.

Som relation mellem svingningstider giver Dunkerleys princip nu

$$T^2 = T_1^2 + T_L^2 = \frac{16\pi^2 M a^3}{E b h^3} + \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 E b h^3} \quad (= \frac{16\pi^2 M a^3}{E b h^3} + \frac{48\pi^2 \rho L^4}{\alpha^4 E h^2}). \quad (14)$$

Opgave 6: a. Omskriv Dunkerleys princip (13) til en relation mellem kvadratet på svingningstiderne ved at benytte (10) **b.** Udled (14) ved at benytte (8) og (11).

Bemærk at seriekobling af fjedre er et eksempel på Dunkerleys princip. Her har man for to fjedre med fjederkonstanter k_1 og k_2 , at systemets fjederkonstant er bestemt ved

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} . \quad (15)$$

Referencer

- 1) Georg Joos, *Theoretical Physics*, s176ff, Dover 1986 (Blackie & Son 3rd ed. 1958, 1st ed 1934).
- 2) Viggo Tvergaard et.al. *Svingningslære*, s88ff, Afdelingen for Faststofmekanik, Danmarks tekniske Højskole (DTU) 1984
- 3) Edgardo Solano Carrillo, *The cantilevered beam: an analytical solution for general deflections of linear-elastic materials*, Eur. J. Phys. **27** (2006) 1437-1445
- 4) Kenneth G. McConnell, *Vibration Testing. Theory and Practice*, s140, J. Wiley and Sons, New York 1995
- 5) Francis S. Tee, Ivan E. Morse & Rolland T. Hinkle, *Mechanical Vibrations. Theory and Applications*, s264, 2nd ed, Allyn and Bacon, Boston 1978
- 6) Jon J. Thomsen (Dept. of Mechanical Engineering, DTU), *Vibrations and Stability*, s59, Springer, Berlin 2003

SVINGENDE BJÆLKE. Måletekniske problemstillinger for ingeniørstuderende

Opgave 7: Usikkerhed. Undersøg ved hjælp af fejlafhængighedsloven, hvor nøjagtigt man kan bestemme henholdsvis masse og position af en partikel ud fra aktuelle usikkerheder på alle målte størrelser.

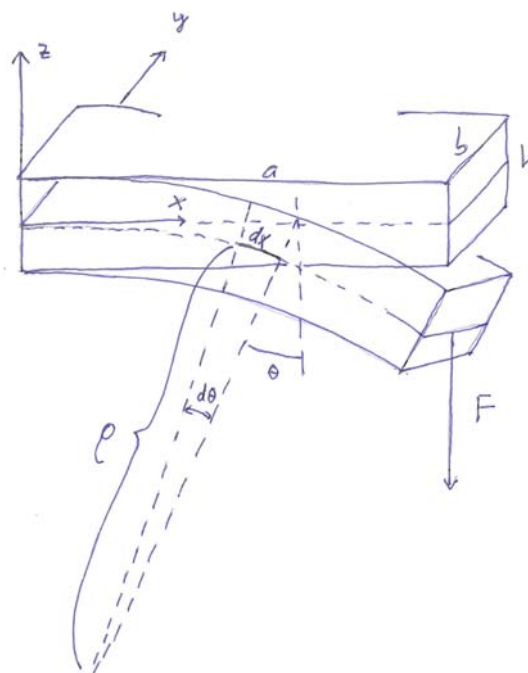
Opgave 8. Frekvensbestemmelse. Signalet fra tøjningsmålerne (strain gaugene) viser en dæmpet svingning, som analyseres med LabVIEWs funktion til "Extract single tone information". Spørgsmålet er, om den uddragne frekvens påvirkes af dæmpningsfaktoren. Med andre ord: Hvis man registrerer en amplitudeafhængig i frekvens, er det så en reel måling eller er det en kunstighed, som skyldes analysemetoden? Kunstigheden kunne tænkes at opstå, fordi man kun analyserer et bestemt tidsvindue af signalet. Efterhånden som svingningen klinger af, rykker dette tidsvindue mod højre svarende til lavere og lavere amplitude.

Problemet kan angribes praktisk ved at eksperimenterer med forskellige tidsvinduer og teoretisk ved at se på Fouriertransformationer. Men især kan det angribes både eksperimentelt og teoretisk ved at sammenligne størrelsen af en eventuel amplitudeafhængighed med en vurdering ud fra den opstillede teori nedenfor. Det kan gøres ved at sammenligne de effektive fjederkonstanter fra hhv. (3) og (30) og den deraf følgende indflydelse på svingningstiden i (8).

Opgave 9. Eventuelt. Overtoner. Teori og måling udvides med overtoner til samtidig bestemmelse af vægt og position.

SVINGENDE BJÆLKE. Teori for ingeniørstuderende

Teorien ovenfor kombinerer to resultater for svingningstider, som vi nu vil udlede. Nemlig for hhv. en massiv bjælke uden partikel og en partikel på en masseløs bjælke.



Figur 4. Lokal krumningsradius mm. for nedbøjet bjælke.

Masseløs bjælke med partikel

Vi antager (kun), at belastningen foregår lodret, så der vil være en *neutral linie* midt i bjælken med samme længde a , som den ubelastede bjælke, og vi antager, at nedbøjningen er så lille, at vi kan se bort fra ændringer i formen på bjælkens tværsnit. Vi antager i øvrigt ikke noget om formen på den neutrale linie. (Den er ikke en del af en cirkelbue). Teorien, som gennemgås i dette afsnit¹⁾ er af J. Bernoulli og fra ca 1700, usikkerhed om det er Jakob (1654-1705) eller Johann (1667-1748). Den er nyligt videreudviklet³⁾ af Edgardo Solano Carillo (2006).

Den lokale krumningsradius betegnes med ρ i positionen x , hvor den neutrale linie er nedbøjet til koordinaten z . Som resultat af nedbøjningen vil materialet over linien blive strukket og under, vil det blive presset sammen. Den relative længdeændring, *tøjningen* (*strain*'et), bliver med figurens betegnelser

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(\rho + z)d\theta - \rho d\theta}{dx} = z \frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{\rho}. \quad (16)$$

Ifølge definitionen af Youngs modul, E , vil den kraft df , der virker på et areal $dzdy$ af tværsnittet være givet ved

$$\frac{df}{dzdy} = E \frac{\Delta dx}{dx}, \quad (17)$$

idet $df / dzdy$ er *spændingen* (*stress*'et) og $\Delta dx / dx$ er *tøjningen* (*strain*'et). Med (16) fås så

$$df = E \frac{z}{\rho} dzdy. \quad (18)$$

Størrelsen af det samlede kraftmoment M på tværsnittet på grund af de (indre) spændinger i positionen x findes nu ved integration

$$|M| = \int z df = \frac{E}{\rho} \int_{-b/2-h/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz dy = \frac{E}{\rho} I, \quad (19)$$

hvor tværsnittets inertimoment I er defineret ved

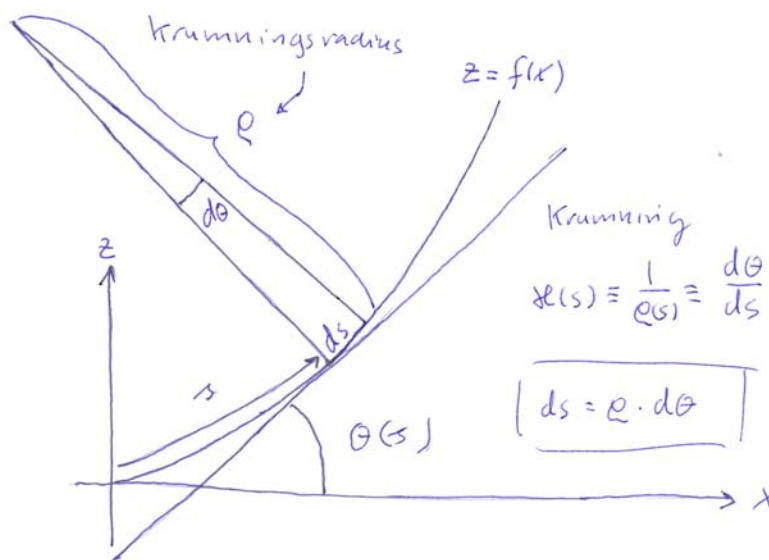
$$I = \int_{-b/2-h/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz dy \quad (20)$$

Det er et inertimoment omkring en vandret akse vinkelret på den neutrale linie (parallel med y -aksen). Nemlig den akse omkring hvilken, kraftmomentet M vil søge at dreje tværsnittet tilbage mod uret.

Den spændte og nedbøjede bjælke vil være i ligevægt, når kraftmomenterne fra de indre spændinger opvejes af det modsatrettede moment fra en ydre belastning. Placeres en lille ydre belastning F for enden af bjælken med længde a , vil den i positionen x levere et kraftmoment $F(a-x)$ på det betragtede tværsnit. Med (19) giver det følgende ligevægtsbetingelse for kraftmomenterne

$$\frac{EI}{\rho} = F(a-x). \quad (21)$$

Vi mangler nu et udtryk for krumningsradiusen. Krumningen er defineret i figur 5.



Figur 5. Definition af krumning og krumningsradius.

Med figurens betegnelser får vi kurvelementet ds givet ved

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (22)$$

Pr definition af krumningsradius har vi også

$$ds = \rho(s) \cdot d\theta(s), \quad (23)$$

hvor tangenvinklen er givet ved $\theta(s) = \tan^{-1}(f'(x))$ (24)

Med ds/dx fra (22) fås ved hjælp af kædereglen

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{d\theta(s)}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta(s)}{dx} \cdot \frac{1}{\left(\frac{ds}{dx}\right)} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(f'(x))) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}. \quad (25)$$

Resultatet er

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}. \quad (26)$$

For små nedbøjninger afviger den neutrale linie kun lidt fra vandret, så vi kan sætte $f'(x) \approx 0$. For afbøjning nedad ($z < 0$) har vi dermed

$$\frac{1}{\rho(s)} \approx -f''(x) = -\frac{d^2z}{dx^2}. \quad (27)$$

Indsætter vi dette udtryk for krumningen i momentbalancen (21), får vi følgende differentiaalligning til bestemmelse af kurven for den neutrale linie

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(a-x). \quad (28)$$

Vi integrerer to gange, benytter randbetingelserne $z(0) = 0$ og $z'(0) = 0$ og får

$$z = -\frac{F}{EI}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right), \quad (29)$$

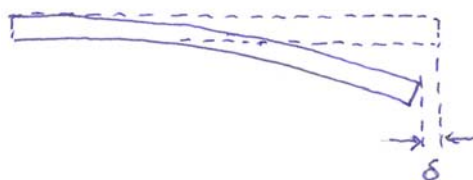
som for $x = a$ giver det i (3) anførte resultat for nedbøjningen

$$z = -\frac{F}{EI} \cdot \frac{a^3}{3}. \quad (3)$$

Til sammenligning anføres her resultatet³⁾, når man tager højde for, at $f'(x)$ ikke er 0.

$$z = -\frac{F}{EI} \cdot \frac{(a-\delta)^3}{3} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{F}{EI}\right)^2 (a-\delta)^4 + \dots \right] \quad (30)$$

Korrektionen δ er forkortningen af bjælkens projektion på vandret, se figur 6. Dvs. (3) giver en god tilnærmelse, hvis man begrænser sig til belastninger F , der er små i forhold til *bøjningsstivheden* EI , og hvis man for a benytter længden af bjælkens vandrette projektion.

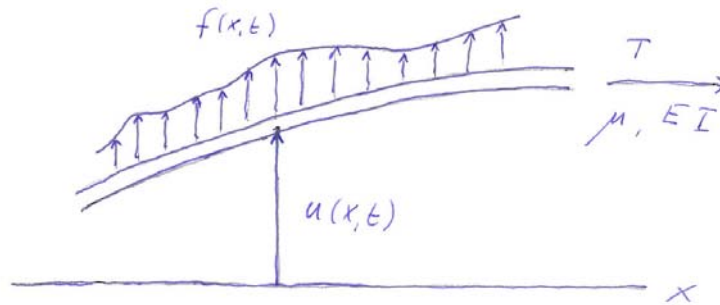


Figur 6. Forkortningen af bjælkens vandrette projektion hænger sammen med nedbøjningen.

Opgave 10. Giv et skøn over størrelsen af δ , hvis en 95 cm lang bjælke nedbøjes 5 cm. Giv et skøn over den relative ændring i effektiv fjederkonstant og svingningstid ifølge (6) og (8).

Massiv bjælke uden partikel

Vi skal her finde egenfrekvensen for en svingende homogen bjælke. Egenfrekvensen er bestemt af bjælkens dimensioner i et samspil med dens masse pr. længdeenhed μ og dens bøjningsstivhed EI . Vi antager, at bjælken er homogen, og at udsvingene fra ligevægtsstillingen er så små, at tværsnittets form forbliver konstant. Vi antager endvidere, at materialeudvidelserne i længderetningen over den neutrale linie og sammenpresningerne under er så små, at elasticitetsmodulet forbliver konstant.



Figur 7. Definition af bjælkeelement med forskydning $u(x,t)$, masse pr. længdeenhed μ , ydre belastning $f(x,t)$, aksial spænding T , bøjningsstivhed EI og stedkoordinat x .

Vi beskriver bjælkens svingninger i lodret plan ved en funktion af sted og tid, se figur 7. Dvs. den lokale udbøjning er beskrevet ved

$$z = u(x,t). \tag{31}$$

Funktionens øjebliksværdi er bjælkens øjeblikkelige facon langs den *neutrale linie*, også kaldet den *neutrale fiber*. Bevægelsen af et bjælkeelement opfylder Newtons 2. lov, som for en *tynd bjælke* i det almene tilfælde,⁴⁾ får bidrag fra den ydre belastning langs bjælken, fra dæmpningen og fra de to elastiske kræfter, som skyldes henholdsvis den aksiale spænding og fra bøjningsstivheden

acc	ydre last	spænding	
$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) - D \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \tag{31}$			
	dæmpning	bøjning	

For en *ubelastet bjælke* er $f = 0$, og hvis bjælken er *fri i den ene ende*, kan vi også sætte den aksiale spænding $T = 0$. Endelig vil vi betragte tilfældet *uden dæmpning*, dvs. $D = 0$. Vi antager, at deformationen af bjælkens tværsnit er så lille, at vi kan regne bøjningsstivheden EI konstant. Dermed reducerer (31) til

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{32}$$

Vi søger harmoniske løsninger af formen²⁾

$$u(x,t) = z(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (33)$$

hvor $z(x)$ kaldes *egenfunktioner*. Ideen i faktoriseringen (33) er, at vi beskriver bjælkens svingning, som en harmonisk svingning med bestemte ”indhyldningsformer” $z(x)$. Egenfunktionerne er altså lokale amplituder, idet cosinusfaktoren varierer mellem -1 og +1. Med andre ord: Vi har her en generalisering af de stående svingninger, som vi kender fra den svingende streng.

Egenfrekvenserne, som er bestemt af vinkelfrekvenserne ω , kan da beskrives ved et samspil med de betingelser, der fastlægger egenfunktionerne. Indsættes (33) i (32) får man følgende differentialligning til fastlæggelse af egenfunktionerne

$$\mu \omega^2 z = EI z'''' \quad (34)$$

Den generelle løsning til (34) kan skrives på formen^{2, matematikreference mangler}

$$z(x) = C_1 \sin(\gamma x) + C_2 \cos(\gamma x) + C_3 \sinh(\gamma x) + C_4 \cosh(\gamma x) \quad (35)$$

Da (34) er en 4. ordens differentialligning, har vi brug for 4 *randbetingelser*. De er som følger^{2,5)}

$$\text{Fastspændt ende} \quad z = 0, \quad z' = 0 \quad (36)$$

Her ligger positionen fast og hastigheden er nul.

$$\text{Frie ende} \quad EI z'' = 0, \quad (EI z'')' \quad (37)$$

Her er bøjningsmomentet og dets afledede nul.

Opgave 11. Vis ved indsættelse af (35) i (34), at samspillet mellem vinkelegensfrekvensen ω og ”formkoefficienten” γ er givet ved

$$\gamma^4 = \omega^2 \mu / (EI) \quad (38)$$

Opgave 12. Lineær algebra. Opskriv, ved at benytte randbetingelserne, betingelsen for, at (34) har egentlige løsninger, dvs. løsninger, hvor ikke alle fire C 'er i (35) er nul. Brug denne betingelse til at finde det i (9) anførte udtryk for den laveste egenfrekvens

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{L^4 \mu}, \quad (9)$$

hvor $\alpha \equiv \gamma L = 1,875\dots$ er den mindste løsning til ligningen $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$.

Konklusion

Hermed har vi redegjort for formlen (1) til beskrivelse af svingningstiden for en tynd bjælke belastet med en partikel. Teorien for partikelvægten bygger på bjælkens egensvingning styret af Newtons 2. lov ifølge (34) og teorien for harmoniske svingninger af massebelastede fjedre ifølge (7), som også er et resultat af Newtons 2. lov.